1 Analisi de Fourier

Espais dotats de producte escalar (pre-Hilbert)

- Producte Escalar – espai pre-Hilbert – $(\circ, \circ)$
- Norma – espai normat – $|| \circ ||$
- Distància – espai mètric – $dist(\circ, \circ)$

1.1 Espai pre-Hilbert

$\mathbb{X}$ espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) amb un 'producte escalar' $(\circ, \circ)$, és a dir:

$$\begin{aligned} (\circ, \circ) = \mathbb{X} \times \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x, y &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

Exemple 1

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \mathbb{R}^3 \\ (x, y) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i &= ||x|| ||y|| \cos \alpha \\ x &= (x_1, x_2, x_3), y = \ldots \end{aligned}$$

Ha de ser 'ben definit' i t.q. compleix els següents axiomes:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$; $\lambda \in \mathbb{C}$
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
4. $(x, x) \geq 0$ i $(x, x) = 0 \iff x = 0$

Totes les demés propietats dels productes escalars es dedueixen d'aquests axiomes.

Exemple 2

$$\mathbb{X} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a, b]; x \in \mathbb{X}$$
$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x(t) y(t) dt$$

satisfà els axiomes.

Exemple 3 (dels axiomes)

$$(x, \lambda y)?$$

$$(x, \lambda y) = \overline{\overline{(x, \lambda y)}} = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \overline{\lambda}\overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y)$$

També:

$$(0, x) = 0(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

1.2 Espai normat

$\mathbb{X}$ espai vectorial amb una 'norma' $||x||$, és a dir:

$$\begin{aligned} || \circ || : \mathbb{X} &\to \mathbb{R} \\ x &\to ||x|| \end{aligned}$$

Ben definit, i amb els següents **axiomes**:

1. $||x|| \geq 0$ i $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Si tinc un producte escalar, també tinc la seva norma associada:

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}$$

Exercici 1 *Demostrar i comentar la llei del paral·lelogram.*
$\mathbb{X}$ *pre-H amb norma associada* $|| \circ ||$

$$\boxed{||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||x||^2} \tag{1}$$

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y) = ||x|^2+(x, y)+(y, x)+||y||^2$$

$$||x - y||^2 = \ldots = ||x|| - (x, y) - (y, x) + ||y||^2$$

Cas particular en el que x *i* y *són ORT (per ex.* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3$*):*

$$\begin{gathered} (x, y) = (y, x) = 0 \\ \Downarrow \\ ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \end{gathered}$$

1.3 Espai mètric $\mathbb{X}$

$$d(x,y)$$

$\mathbb{X}$ conjunt amb certs elements i una distància $d(\circ,\circ) = \mathbb{X}\times\mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $d(x,y) \geq 0$ i $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Amb la idea de proximitat, tenim els següents conceptes:

Definició 1 (límit) *Sigui $(X_k)_{k\geq 1}$ una successió de vectors $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{X}$ que té límit x (o convergeix a x) quan $d(x_k, x)_{k\to\inf} \to 0$ $(d(x_1,x), d(x_2,x), \ldots \to 0)$*
Successió convergent, successió de Cauchy, *continuitat.*

Exercici 2 *Recordar la llei del paral·lelogram:*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = ||x||^2 + (x,y) + (y,x) + ||y||^2 = ||x||^2 + 2Re(x,y) + ||y||^2$$
$$\leq ||x||^2 + 2|(x,y)| + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$
$$\Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

A partir d'això, obtenim la Desigualtat de Cauchy-Swarz*:*

$$|(x,y)| \leq ||x||||y|| \Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \tag{2}$$

Exercici 3 *(esp. normat). Donats x, y:*

$$||x|| - ||y|| = ?$$

1. $||x|| = ||x-y+y|| \overset{\text{Des.triang}}{\leq} ||x-y|| + ||y||$

$$\boxed{||x|| - ||y|| \leq ||x-y||}$$

2. $(x \leftrightarrow y)$

$$||y|| - ||x|| \leq ||y-x|| = ||x-y||$$
$$\otimes(-1)\text{:}\ \boxed{||x|| - ||y|| \geq -||x-y||}$$

obtenim: $|||x|| - ||y||| \leq ||x-y||$

Exercici 4 *A* $\mathbb{R}^2$*:*

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| \text{ \textit{trobar} } x \in \mathbb{R}^2 \text{ \textit{t.q.} } ||x||_1 = 1$$

En el camí de provar la desigualtat de *Cauchy-Swarz...* i si hi ha igualtat? (ens trobem amb el mètode de *Gram-Schmid* per ORT. vectors)